

Rei'itetyn laatan taipuman laskeminen efektiivisten materiaalivakioiden avulla

TKK

Lujuusopin laboratorio

Kul-49.180 Lujuusopin erikoistyö

Jani Paavilainen

48661C

28. toukokuuta 2002

1 Johdanto

Tässä erikoistyössä käsitellään neliörei'itetyn laatan taipuman laskemista efektiivisten materiaalivakioiden avulla. Materiaalivakioiden määrittämiseksi esitellään kaksi eri menetelmää. Toista näistä käytetään implementoituessa homogenisoitua mallia elementtimenetelmäohjelmistoon. Implementoitu malli verifioidaan vertailemalla laskettuja homogenisoidun laatan taipumia sekä ehjän että rei'itetyn laatan taipumiin.

Aluksi työssä on esitelty energia- ja kompleksimuuttujamenetelmät efektiivisten materiaalivakioiden määrittämiseksi. Seuraavaksi on annettu esimerkkiongelman kuvaus. Tämän jälkeen on kyseisestä ongelmasta luotu tarkka malli, joka on verifioitu. Sitten esimerkkiongelma on ratkaistu käyttäen efektiivisiä materiaalivakiota. Lopuksi on vertaitu efektiivisten materiaalivakioiden avulla homogenisoidun laatan taipuman arvoja tarkalla mallilla saatuihin rei'itetyn laatan taipuman arvoihin sekä ehjän laatan taipuman arvoihin.

2 Homogenisoinnin teoria

Molemmissa seuraavaksi esiteltävissä homogenisointimenetelmissä on tarkoituksena määrittellä ortotrooppiselle laatalle materiaalivakiot siten, että mallilla voidaan approksimoida rei'itetyn laatan taipumaa. Näin määriteltyjä materiaalivakiota kutsutaan efektiivisiksi materiaalivakioksi.

2.1 Energiamenetelmä

Energiamenetelmän ideana on tasapainottaa ehjän ortotrooppisen laatan ja rei'itetyn laatan samankaltaisten peruselementtien muodonmuutosenergiat, ks. kuva 1. Näin saadaan ratkaistua ortotrooppisen laatan efektiiviset materiaalivakiot.

Ortotrooppisen laatan taivutusmomenttien lausekkeet voidaan esittää muodossa (ks. esim. Pedersen, Olthuis ja Bergveld [1]),

$$M_x = -\frac{t^3}{12} \left(C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$M_y = -\frac{t^3}{12} \left(C_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$M_{xy} = \frac{t^3}{6} \left(C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (3)$$

missä t on laatan paksuus, $C_{11} = C_{22}$, $C_{12} = C_{21}$ ja C_{44} ovat materiaalivakiota ja w on laatan taipuma. $dxdy$ kokoisen laatta-alkion taivutusmuutosenergia saadaan muotoon [1]

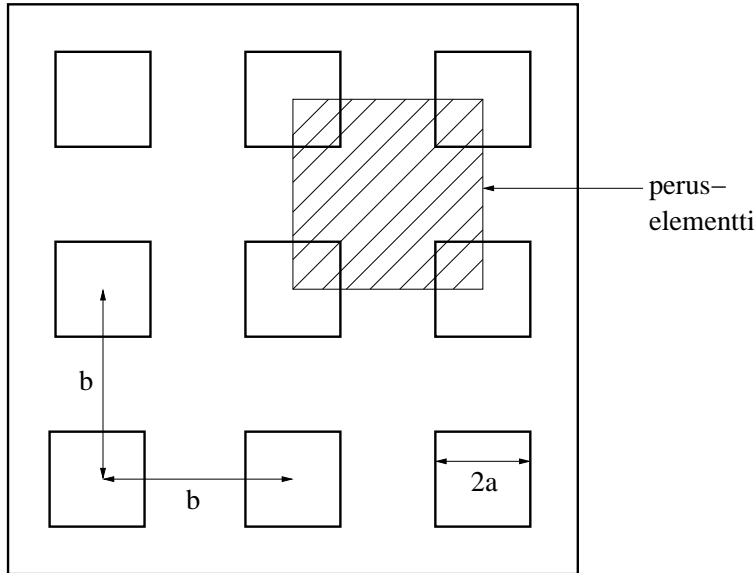
$$\begin{aligned} dV_{bs} &= -\frac{1}{2} \left[M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + M_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) \right] dxdy \\ &= \frac{t^3}{24} \left[C_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4C_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] dxdy \end{aligned} \quad (4)$$

Tähän pitää lisätä vielä laatan keskipinnan suuntaisista jännityksistä tuleva muodonmuutosenergian osuus. Tämä voidaan esittää muodossa [1]

$$dV_{ss} = \frac{1}{2} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y) dxdy, \quad (5)$$

missä N_x ja N_y ovat laatan keskipinnan suuntaisia normaalivoimia sekä ε_x ja ε_y ovat venymiä laatan keskipinnalla. Voima-venymäyhteyden avulla ja olettamalla yhteys $N_x = N_y = \sigma h$ voidaan yhtälö (5) saattaa muotoon [1],

$$\begin{aligned} dV_{ss} &= \frac{1}{2hE} [N_x (N_x - \nu N_y) + N_y (N_y - \nu N_x)] dxdy \\ &= \frac{h(1 - \nu)\sigma^2}{E} dxdy, \end{aligned} \quad (6)$$



Kuva 1: Reikien koot ja etäisyydet sekä peruselementti.

missä E on kimmokerroin, ν on Poissonin vakio ja σ on komponenttien N_x ja N_y aiheuttama jännitys. Ortotrooppisen laatta-alkion koko muodonmuutosenergian lausekkeeksi saadaan näin ollen [1]

$$\begin{aligned} dV_{ts} = dV_{ss} + dV_{sb} = & \frac{h(1-\nu)\sigma^2}{E} dx dy \\ & + \frac{t^3}{24} \left[C_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2C_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4C_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Rei'itetyn laatan peruselementti voidaan ajatella yhtenä pienenä laattana, jonka sivun pituus on $b - 2a$, ja neljänä a :n pituisena palkkina, ks. kuva 1. Laskemalla näiden osien muodonmuutosenergiat yhteen saadaan peruselementin taiputusmuodonmuutosenergiaksi [1]

$$\begin{aligned} dV_{bb} = & \frac{Eh^3}{24} \left[\left\{ \frac{b(b-2a)}{1-\nu^2} + \frac{a(b-2a)^2}{b} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} + \frac{2\nu b(b-2a)}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \right. \\ & \left. \cdot \left\{ 2b(b-2a) + \frac{12Ka(b-2a)}{bh^3} \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

missä K on vakio¹, joka on määritelty seuraavasti

$$K = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(1 - 0.63 \frac{b-2a}{h} \right) (b-2a)^3 h, & \text{jos } h > b-2a \\ \frac{1}{3} \left(1 - 0.63 \frac{h}{b-2a} \right) (b-2a) h^3, & \text{jos } h < b-2a. \end{cases} \quad (9)$$

Oletetaan laatan keskipinnan suuntaisten normaalivoimien aiheuttaman muodonmuutosenergian olevan riippumaton laatan taipumasta. Tällöin saadaan peruselementille keskipinnan suuntaisten voimien aiheuttama muodonmuutosenergia yksinkertaisesti redusoimalla kaavaa (6) kertoimella, joka ottaa huomioon reikien pinta-alalla pienentyneen laatta-alkion pinta-alan [1]

$$dV_{sb} = \left(1 - \frac{4a^2}{b^2} \right) \frac{h(1-\nu)\sigma^2}{E} dx dy. \quad (10)$$

¹Artikkelissa [1] on K :n määritelmässä virhe. Artikkeliin on merkitty $(b-2a)/h^3$, jolloin K :n arvo ei ole jatkuva pisteessä $h = b - 2a$.

Rei'itetyn laatan peruselementin koko muodonmuutosenergiaksi saadaan näin ollen [1]

$$\begin{aligned}
V_{bt} = & \frac{Eh^3}{24} \left[\left\{ \frac{b(b-2a)}{1-\nu^2} + \frac{a(b-2a)^2}{b} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} + \frac{2\nu b(b-2a)}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \right. \\
& \left. \cdot \left\{ 2b(b-2a) + \frac{12Ka(b-2a)}{bh^3} \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 \right] \\
& + \frac{h(b^2 - 4a^2)(1-\nu)\sigma^2}{E}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Asettamalla tämä muodonmuutosenergia yhtäsuureksi sivunpituuden b omaavan ortotrooppisen laatan muodonmuutosenergian lausekkeen (8) kanssa saadaan efektiiviset materiaalivakiot ratkaistua [1]:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E}{b^2} \left\{ \frac{b(b-2a)}{1-\nu^2} + \frac{a(b-2a)^2}{b} \right\} \tag{12}$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{\nu E(b-2a)}{b(1-\nu^2)} \tag{13}$$

$$C_{44} = \frac{E}{4b^2(1+\nu)} \left\{ 2b(b-2a) + \frac{12Ka(b-2a)}{bh^3} \right\}. \tag{14}$$

Rei'itetyn laatan keskipinnan jännitykset voidaan redusoida ortotrooppisen laatan keskipinnan jännityksiksi kertoimen $\sqrt{(1-4a^2/b^2)}$ avulla seuraavasti [1]

$$\sigma_{red} = \sqrt{(1-4a^2/b^2)}\sigma, \tag{15}$$

missä σ on rei'itetyn laatan keskipinnan jännitys. Tätä redusoitua jännitystä ja modifioituja materiaalivakiota (12), (13) ja (14) voidaan nyt käyttää ortotrooppisella laatala, jolloin se saa rei'itetyn laatan ominaisuudet.

2.2 Kompleksimuuttujamenetelmä

Kompleksimuuttujamenetelmässä lähdetään liikkeelle taivutusongelman differentiaaliyhtälön kompleksimuodon ratkaisusta, joka voidaan esittää muodossa [2]

$$w(x, y) = Re[z\phi(z) + \chi(z)], \tag{16}$$

missä z on kompleksikoodinaatti $x + iy$ ja ϕ ja χ ovat kompleksimuuttujan z analyyttisiä funktioita. Momentit ja normaalivoimat pituusyksikköä kohti voidaan esittää kompleksifunktioiden avulla seuraavasti [2]

$$M_x + M_y = -2D(1 + \nu)[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \quad (17)$$

$$M_y - M_x + 2iM_{xy} = 2D(1 - \nu)[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \quad (18)$$

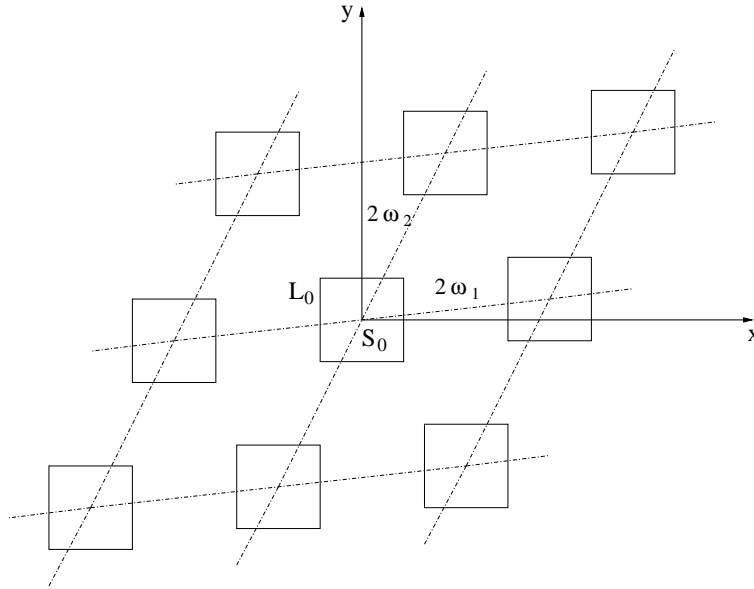
$$N_x - iN_y = -4D\phi''(z), \quad (19)$$

missä D on laatan taivutusjäykkyys $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ ja $\psi(z) = \frac{d\chi(z)}{dz}$. Siirtymiksi u ja v saadaan kompleksifunktioiden avulla [2]

$$u + iv = -z^*[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\phi(z)}], \quad (20)$$

missä z^* tarkoittaa kolmatta karteesta koordinaattia. Näitä kompleksiratkaisuja voidaan käyttää neliörei'itetyn laatan taipuman laskemiseen.

Kuvassa (2) on esitetty Meijersin [3] käyttämä merkintätapa. Meijersin teoria on johdettu kaksoisjaksollisille yhtäsuurille ympyräreikien tapaukselle, mutta sitä voidaan soveltaa reunaehtojen muutoksilla myös yhtäsuurten neliöreikien tapaukseen. Kuvassa (2) origo on reiän S_0 keskipisteessä ja L_0 :lla on merkitty origon ympärillä olevan reiän reunaa. Reikäkuvion jaksoja on merkitty $2\omega_1$:llä ja $2\omega_2$:lla.



Kuva 2: Kompleksimuuttujamenetelmässä käytetyt merkinnät.

Jännitysjakaumien ollessa kaksoisjaksollisia voidaan yhtälön (17) perusteella todeta, että funktio $\phi(z)$ on kvasiperiodinen eli näennäisjaksollinen [4].

Yhtälön (18) perusteella taas funktio $\chi(z)$ ei ole kvasiperiodinen. Tämän vuoksi otetaan käyttöön lisäfunktio $\phi_I(z)$ siten, että

$$\Omega(z) = \chi(z) - \phi_I(z) \quad (21)$$

on kvasiperiodinen [3].

Tarkastelemalla reikien kuormituksia voidaan todeta, että lauseke

$$g = -\kappa^* \overline{\phi(z)} + \bar{z}\phi'(z) + \phi_I(z) + \Omega(z) \quad (22)$$

on kvasiperiodinen ja sen jaksot ovat $2\omega_k$ ($k = 1, 2$) siten, että

$$g(z + 2\omega_k) - g(z) = 2\theta_k. \quad (23)$$

Taivutustapauksessa $\kappa^* = \frac{3+\nu}{1-\nu}$ ja

$$\begin{aligned} 2\theta_k &= \frac{1}{D(1-\nu)} [(M_x^* + M_y^*)\bar{\omega}_k \\ &+ (M_y^* - M_x^* + 2iM_{xy}^*)\omega_k] \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (24)$$

missä M_x^* , M_y^* ja M_{xy}^* ovat keskimääräisiä taivutusmomenteja pituusyksikköä kohti. Momentti M_{xy}^* sisältää sekä leikkausvoiman että vääntömomentin [4].

Reiän S_0 reunalla L_0 pätee

$$-\kappa^* \overline{\phi(t)} + \bar{t}\phi'(t) + \phi_I(t) + \Omega(t) = h(t), \quad (25)$$

missä $h(t)$ määrittelee reunakuorman reunalla L_0 . Kuormittamattoman reunan tapauksessa $h(t) = 0$ [3].

Reuna-arvotehtävä on saatu nyt redusoitua kahden kvasiperiodisen funktion $\phi(z)$ ja $\Omega(z)$ määrittämiseksi. Funktioiden pitää olla $2\omega_k$ ($k = 1, 2$) periodisia ja holomorfisia laatan alueella siten, että yhtälö (22) on kvasiperiodinen annetuilla inkrementeilä $2\theta_k$ ($k = 1, 2$). Funktioiden pitää myös toteuttaa annettu reunaehto (25) reunalla L_0 [4].

Meijersin [3] mukaan kuormittamattomien reunojen tapauksessa voidaan jännitysfunktio $\phi(z)$ kehittää sarjaksi

$$\phi(z) = A_0^* z + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \frac{\zeta^{(2n)}(z)}{(2n)!}, \quad (26)$$

missä $\zeta(z)$ on Weierstrassin zeta-funktio. Tämä sarja suppenee yhtenäisesti laatan ehjällä alueella. $\phi_I(z)$ määritellään myös sarjakehitelmänä

$$\phi_I(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \frac{\zeta_I^{(2n)}(z)}{(2n)!}, \quad (27)$$

missä $\zeta_I(z)$ on

$$\zeta_I(z) = \sum'_{p,q} \left[-\frac{\overline{\Omega_{p,q}}}{(z - \Omega_{p,q})^2} + \frac{\overline{\Omega_{p,q}}}{\Omega_{p,q}^2} + 2z \frac{\overline{\Omega_{p,q}}}{\Omega_{p,q}^3} \right]. \quad (28)$$

Yhtälön (28) summauksessa oleva pilkku tarkoittaa sitä, että termi arvoilla $p = q = 0$ jätetään huomioimatta. Jännitysfunktion $\Omega(z)$ sarjakehitelmän Meijers [3] olettaa olevan muotoa

$$\Omega(z) = B_0^* z + \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{-\zeta^{(2n)}(z)}{(2n)!}. \quad (29)$$

$\phi(z)$:n, $\phi_I(z)$:n ja $\Omega(z)$:n kehittämien tulee toteuttaa reunaehto (25) ja jaksollisuusvaatimus (24). Ehtojen soveltaminen johtaa lineaariseen yhtälöryhmään kertoimille A_0^* ja A_{2n} ($n = 0, 1, \dots$) sekä toiseen yhtälöryhmään, jossa kertoimet B_0^* ja B_{2n} ($n = 0, 1, \dots$) esitetään kertoimien A_0^* , A_{2n} ja ulkoisen kuormituksen avulla [4].

2.2.1 Efektiivisten materiaalivakioiden määrittäminen

Tasojännitystapauksessa voidaan keskimääräiset venymät $(\varepsilon_x)_m$, $(\varepsilon_y)_m$ ja $(\gamma_{xy})_m$ määrittää keskimääräisten jännitysten S_x , S_y ja T_{xy} avulla seuraavasti [4]

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x) &= \frac{1}{E_1} S_x - \frac{\nu_{21}}{E_2} S_y \\ (\varepsilon_y) &= \frac{\nu_{12}}{E_1} S_x - \frac{1}{E_2} S_y \\ (\gamma_{xy}) &= \frac{1}{G_{12}} T_{xy}, \end{aligned} \quad (30)$$

missä E_1 , E_2 , $\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2$ ja G_{12} ovat tuntemattomia efektiivisiä materiaalivakioita. Keskimääräisten jännitysten ja momenttejen välillä pätee yhteydet [2]

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{12\delta}{t^3} M_x^* \\ S_y &= \frac{12\delta}{t^3} M_y^* \\ T_{xy} &= \frac{12\delta}{t^3} M_{xy}^*, \end{aligned} \quad (31)$$

missä $-t/2 \leq \delta \leq t/2$.

Määrittämällä keskimääräiset venymät yhtälön (20) avulla kolmelle toisistaan riippumattomalle jännityskomponenttien kombinaatiolle saadaan riittävä määrä yhtälöitä tuntemattomien efektiivisten materiaalivakioiden määrittämiseksi [4].

Kun efektiiviset materiaalivakiot on saatu määriteltyä voidaan rakenteen jännitykset laskea ortotrooppista laattaa käyttäen. Näin saadut jännitykset vastaavat rei'itetyn laatan keskimääräisiä jännityksiä. Näin homogenisointi on saatu suoritettua. Kuitenkin näiden keskimääräisten jännitysten avulla voidaan vielä määrittää uudet jännitysfunktiot, joiden avulla saadaan laskettua todellinen rei'itetyn laatan jännitys jakauma sekä siirtymät [3]. Siirtymistä saadaan taipuma ratkaistua huomioimalla yhteydet [2].

$$u = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (32)$$

$$v = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (33)$$

Kompleksimuuttajamenetelmä antaa siis Kirchhoff oletusten ollessa voimassa teoriassa tarkkoja taipumia. Sarjakehitelmistä (26)-(29) tulee kuitenkin katkaisuvirheestä johtuvaa epätarkkuutta ratkaisuihin [3].

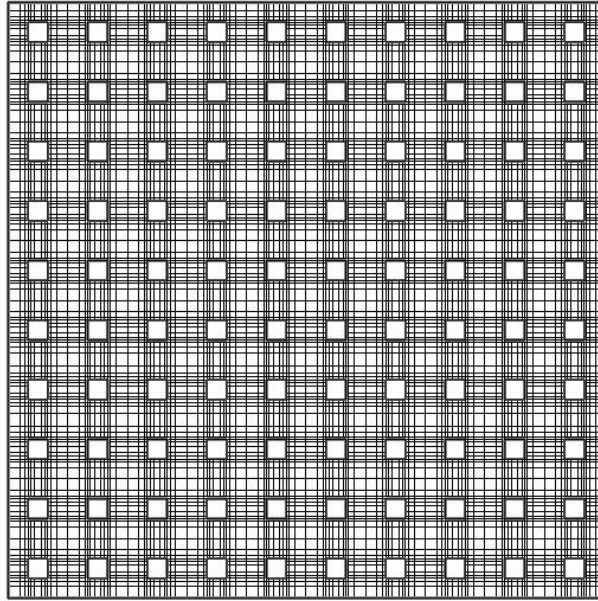
3 Tarkka ratkaisu

3.1 Ongelman kuvaus

Sovelluksena tutkitaan mikrofonissa olevaa rei'itettyä takalaattaa. Kyseessä on pieni $2.0 \text{ mm} \times 2.0 \text{ mm}$ oleva laatta, jonka paksuus $t = 1.0 \text{ }\mu\text{m}$. Neliöreikiä tutkittavassa laatussa on 400 kpl ja yhden reiän pinta-ala $A = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$. Laatta on valmistettu piistä, joten sen kimmokerroin $E = 162 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ja Poisson vakio $\nu = 0.27$. Mikrofonissa takalaatta on jäykästi kiinnitetty tukiinsa kaikilta sivuiltaan ja siihen vaikuttaa tasainen staatinen paine $p = 1.0 \text{ N/m}^2$.

3.2 Rei'itetyn laatan malli

Rei'itetyn laatan todellisen taipuman approksimaatio laskettiin elementtimenetelmällä käyttäen Elmer-ohjelmistoa. Tätä taipuman approksimaatiota kutsutaan tulevassa tekstissä 'tarkaksi ratkaisuksi'. Laatan geometria ja elementtiverkko luotiin käyttäen Quickmesh ohjelmaa, ks. kuva 3. Symmetrian vuoksi laatasta tarvitsi mallintaa vain yksi neljäsosa eli 10×10 reikää sisältävä $1.0 \text{ mm} \times 1.0 \text{ mm}$ oleva laatta, jonka kaksi vierekkäistä sivua ovat jäykästi kiinnitettyjä. Taipuman laskemiseen käytettiin 10000:ta elementtiä.



Kuva 3: Rei'itetty laatta ja elemettiverkko.

Elementtinä oli neljä solmuinen 12-vapausasteinen Reissner-Mindlin laat-taelementti, ns. stabiloitu MITC-elementti. Tällöin ohuilla laatoillakaan ei laskentatarkkuudessa synny ongelmia.

3.2.1 Stabiloitu MITC-elementti

Laatan potentiaalienergian lauseke koostuu taivutus- ja leikkausenergioista sekä ulkoisen kuorman tekemästä työstä. Ohuilla laatoilla energian minimointi johtaa ns. Kirchhoffin rajoitteseen, jonka mukaan leikkausmuodonmuutosten on kadottava. Elementtimenetelmässä rajoitetta ei kuitenkaan voida toteuttaa sellaisenaan (ongelmana lukkiutuminen) vaan sopivalla tavalla redusoidussa muodossa. Eräs suosituimmista reduktiomenetelmistä on ns. MITC-sekaformulaatio (Mixed Interpolation of Tensorial Components), jossa rajoitetta heikennetään leikkausmuodonmuutosta interpoloimalla [5]. 9- ja 12-vapausasteiset MITC-elementit on lisäksi stabiloitava esim. lähteessä [6] ehdotetulla tavalla (lisäämällä potentiaalienergiaan tiettyjä tasapainoyhtälöistä johdettuja termejä).

3.3 Mallin verifiointi

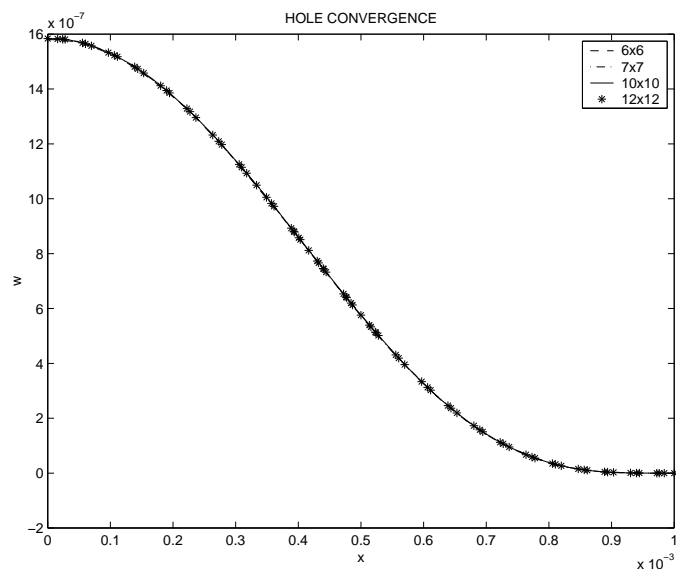
Luotu tarkka malli verifioitiin tutkimalla taipuman arvoja elementtiverkkoa tihennettäessä. Taulukkoon 1 on kerätty tarkalla mallilla laskettuja maksimitaipuman arvoja eri elementtimäärillä.

Taulukko 1: Taipuman maksimi-arvoja eri elementtimäärillä.

| elementtien lkm. | maksimi- taipuma (μm) |
|---------------------|---------------------------------------|
| 2511 | 1.569 |
| 5040 | 1.583 |
| 8200 | 1.583 |
| 10043 | 1.584 |
| 12567 | 1.585 |
| 15032 | 1.586 |

Taulukossa 1 olevista maksimitaipuman arvoista voidaan havaita hidasta konvergentia elementtimäärän kasvaessa. Luodulla mallilla saadaan siis kelvollinen approksimaatio rei'itetyn laatan taipumalle.

Mallinnettaessa rei'itettyä laattaa ehjillä ortotrooppisilla laatoilla ei reikien lukumäärää huomioida millään tavalla. Tämän vuoksi on tarpeen tutkia reikien lukumäärän vaikutusta rei'itetyn laatan taipumaan. Kuvaan 4 on piirretty laattojen taipuma x suunnassa eri reikien lukumäärällä.

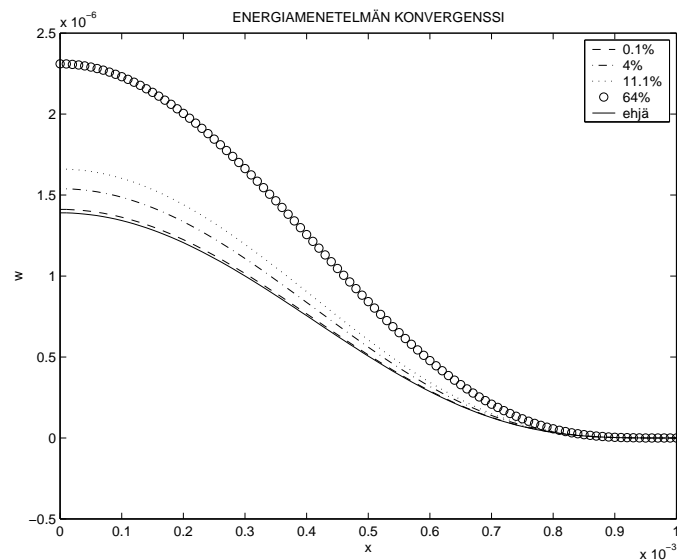


Kuva 4: Taipumat eri reikien lukumäärällä.

Kuvasta 4 havaitaan, että koko laatassa olevien reikien määrän vaihdellessa 144-576 kpl:n välillä ei laatan taipumassa ole minkäänlaisia eroja laskentatarkkuuden rajoissa. Homogenisointimenetelmällä voidaan siis approksimoida laatan taipumaa, ainakin kyseisillä reikien määrillä, reikien lukumäärästä riippumatta.

4 Homogenisointi

Kompleksimuuttujamenetelmässä suoritettu homogenisointi on vasta välitulos, jonka avulla voidaan laskea teoriassa laatan tarkat taipumat. Jotta nämä taipumat saataisiin laskettua on kuitenkin määriteltävä kolme toisistaan riippumatonta jännityskomponenttien kombinaatiota. Näiden määrittäminen kaikille mahdollisille tapauksille ohjelmoimalla katsottiin työlääksi ja hankalaksi, joten homogenisointi päätettiin tehdä energiamenetelmällä. Energiamenetelmällä ei saada laskettua rei'istä johtuvia jännityspiikkejä. Tässä mikrofonisovelluksessa, jossa ollaan ainostaan kiinnostuneita laatan taipumasta, eivät nämä jännityspiikit ole kuitenkaan kriittisiä. Voidaan olettaa, että rei'itetty takalaatta kestää kaikki siihen mahdollisesti aiheutuvat kuormitukset. Näin ollen energiamenetelmän käyttö on tässä sovelluksessa perusteltua.



Kuva 5: Energiamenetelmällä lasketun taipuman konvergentti reikien pienentyessä.

Energiamenetelmän mukainen homogenisointi liitettiin Elmerissä elasti-

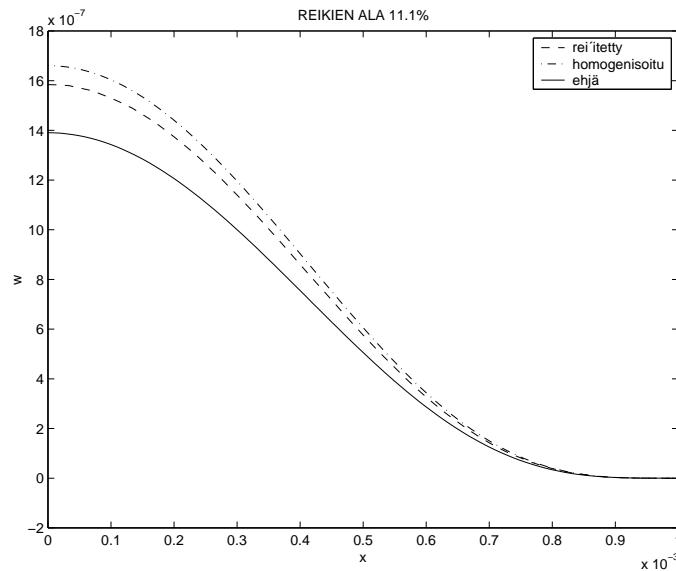
suusmatriisiin laskemisen yhteyteen. Elastisuusmatriisiin alkiot laskettiin kaavoissa (12), (13) ja (14) esitettyjen reikien koosta riippuvien vakioiden avulla. Samassa yhteydessä myös tehtävän annossa mahdollisesti määritellyt keskipinnan jännitykset redusoitiin kaavan (15) mukaisesti.

Kuvasta 5 voidaan nähdä, että energiamenetelmällä laskettu laatan taipuma konvergoi kohti ehjän laatan taipumaa reikien koon pienentyessä. Homogenisointi energiamenetelmää käyttäen näyttää siis käyttökelpoiselta.

Energiamenetelmässä rei'itetyn laatan peruselementti jaettiin yhteen pieneen laattaan ja neljään yhtäsuureen palkkiin. Tämä huomioon ottaen voidaan olettaa, että menetelmä antaa tarkempia tuloksia reikien suurentuessa, koska silloin peruselementti vastaa paremmin sille suoritettua jakoa.

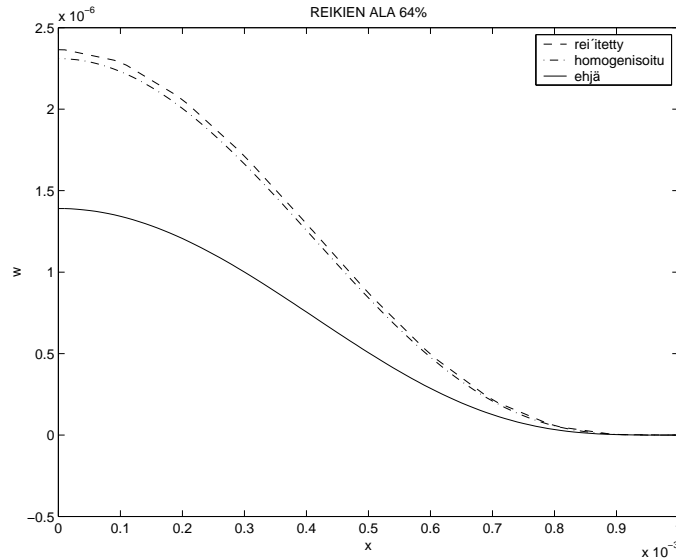
4.1 Tulokset

Tuloksiin on koottu 10×10 reikää sisältävän laatan neljänneksen taipumat x -akselin suunnassa siten, että y :n arvo pysyy nollana ja laatan maksimitaipuma on kohdassa $x = y = 0$, joka on koko laatan keskipiste. Taipuma on luonnollisesti samansuuruinen y -akselin suunnassa. Kuvissa 6, 7 ja 8 on esitetty ehjän laatan sekä rei'itetyn laatan että tätä approksimoivan homogenisoidun laatan taipumat x -akselin suunnassa neljällä eri reiän suuruudella.



Kuva 6: Taipuma reiän pinta-alan ollessa 11.1% laatan alasta.

Kuvista 6 ja 7 voidaan havaita, että homogenisoitu malli approksimoi pienillä rei'illä (11.1%) laatan taipuman todellista suuremmaksi ja suurilla



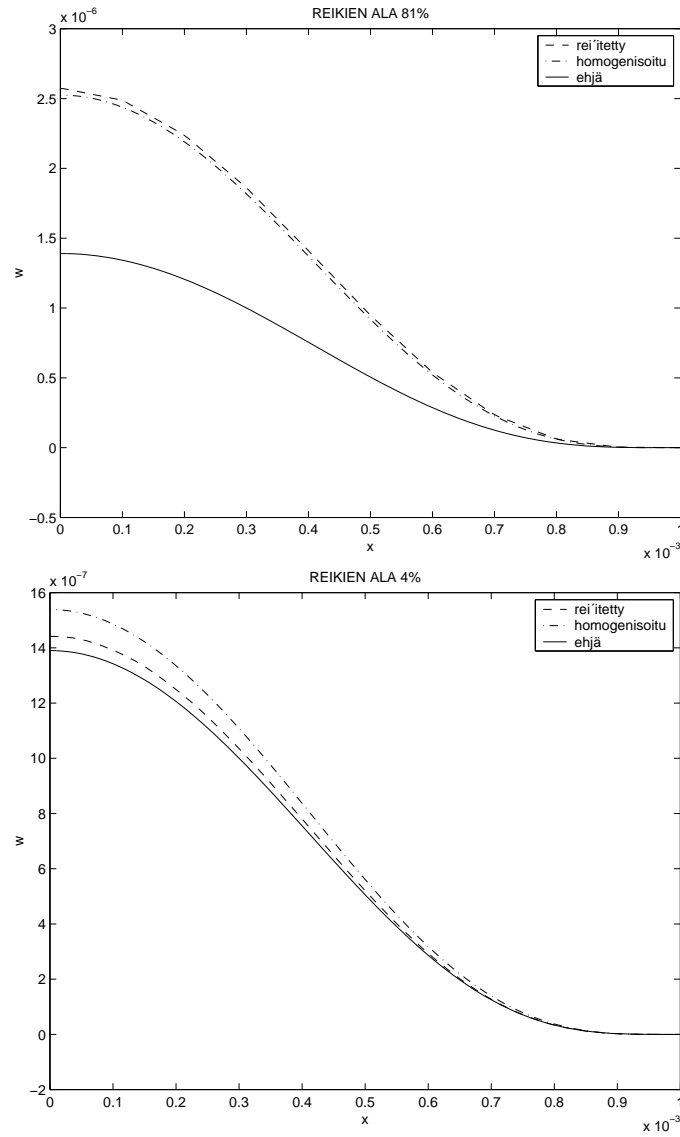
Kuva 7: Taipuma reiän pinta-alan ollessa 64% laatan alasta.

rei'illä (64%) laatan taipuman todellista pienemmäksi. Reiänkoon muuttuessa jatkuvasti myös taipuma muuttuu jatkuvasti. Tämän ja kuvien 6 ja 7 perusteella voidaan päätellä, että on olemassa sellainen reiänkoko jolloin energiamenetelmällä laskettu laatan taipuman arvo on myös tarkka taipuman arvo.

Kuvaan 8 on piirretty vielä laatan taipumat reikien pinta-alojen ollessa 81% ja 4% koko laatan alasta. Katsomalla tätä ja kuvissa 6 ja 7 esitettyjä taipuman arvoja voidaan havaita, että suuremmilla rei'illä homogenisoimalla saatu taipuman approksimaatio on tarkempi kuin pienemmillä rei'illä. Taulukkoon 2 on kerätty homogenisoimalla lasketun taipuman suhteelliset virheet tarkasti laskettuun taipumaan sekä ehjällä laatalle lasketun taipuman suhteelliset virheet tarkasti laskettuun taipumaan reikien pinta-alojen ollessa 4, 11.1, 36, 64 ja 81 prosenttia koko laatan alasta.

Taulukko 2: Taipuman suhteelliset virheet.

| reiänkoko (% koko alasta) | homogenisoidun suhteellinen virhe tarkkaan (%) | ehjän suhteellinen virhe tarkkaan (%) |
|------------------------------|---|--|
| 4 | 6.32 | 3.71 |
| 11.1 | 4.58 | 13.94 |
| 36 | 0.33 | 42.62 |
| 64 | 2.36 | 70.09 |
| 81 | 1.83 | 84.90 |



Kuva 8: Taipumat reikien pinta-alan ollessa 81% sekä 4% laatan alasta.

Taulukosta 2 voidaan havaita, että reikien pinta-alan ollessa 36 prosenttia koko laatan alasta ollaan hyvin lähellä tarkkaa ratkaisua. Taulukosta havaitaan myös, että reikien ollessa pieniä saadaan tarkempia taipuman approksimaatioita käyttämällä mallinnuksessa ehjää laatua kuin mitä saataisiin käyttämällä energiamenetelmää. Energiamenetelmää ei siis kannata käyttää reikien pinta-alan ollessa pienempi kuin kymmenen prosenttia koko laatan pinta-alasta.

Kuvien 6, 7 ja 8 ja taulukon 2 perusteella voidaan todeta aiemmin esitetyn peruselementin geometriaan perustuvan oletuksen, että energiamenetelmä antaa tarkempia tuloksia reikien suurentuessa, pitävän paikkaansa. Tässä pitää kuitenkin muistaa, että jollain reiänkoolla saadaan myös tarkka taipuman arvo. Pidemmälle meneviä taipuman konvergointi laskelmia ei reikien suurentuessa suoritettu, joten tässä tyydytään antamaan vain seuraavanlainen virheraja homogenisoimalla approksimoidulle taipumalle.

Laskettujen suhteellisten virheiden perusteella voidaan todeta energiamentelmän antavan viiden prosentin virherajalla tarkkoja taipuman arvoja, kun reikien pinta-ala on enemmän kuin 10% koko laatan pinta-alasta. Tämä tarkkuus taipuman laskemisessa riittää hyvin esimerkkinä käytetyssä mikrofonitapauksessa.

5 Pohdinnat

Tässä erikoistyössä tutkittiin neliörei'itetyn laatan taipuman laskemista efektiivisten materiaalivakioiden avulla. Elmer-ohjelmistoon toteutettu energiamentelmään pohjautuva funktio näiden materiaalivakioiden määrittelemiseksi verifioitiin esimerkkiongelman avulla.

Energiamentelmä antaa vain karkeita approksimaatioita rei'itetyn laatan jännityksistä, mutta kuitenkin sillä voidaan hyvin estimoida laatan taipumaa tapauksissa, joissa rei'istä johtuvat laatassa ilmenevät jännityshuiput eivät ole kriitisiä. Tarkempia tuloksia varsinkin jännitysten osalta saadaan kompleksimuuttujamentelmällä.

Esimerkkiongelman olleen rei'itetyn takalaatan taipuman laskeminen energiamentelmällä onnistui hyvin. Virhe kasvoi laatassa olleiden reikien pientyessä, mutta suurimmillaankin virhe oli lasketuissa tapauksissa vain 6.3%. Mikrofonin takalaatassa ei näin pieniä reikiä ole, joten homogenisointia energiamentelmällä voidaan huoletta käyttää kyseisissä sovelluksissa.

Jatkossa voisi toteuttaa kompleksimuuttujamentelmän mukaisen rei'itettyjen laattojen analysoinnin kyseiselle esimerkkitapaukselle ja vertailla sillä saatuja tuloksia energiamentelmällä nyt saatuihin tuloksiin. Energiamentelmän konvergointia reikien suurentuessa kannattaisi myös tarkastella lä-

hemmin. Energiamenetelmän voisi myös toteuttaa muillekin reikägeometrioille kuin neliöille. Lisäksi kompleksimuuttujamenetelmään voisi yrittää kehittää mahdollisimman monelle tapaukselle pätevän tavan määrittellä menetelmän vaatimat kolme toisistaan riippumatonta jännityskomponenttien kombinaatiota, jolloin menetelmän voisi liittää esimerkiksi osaksi Elmer-ohjelmistoa.

Viitteet

- [1] M. Pedersen, W. Olthuis, P. Bergveld. 1996. *On the mechanical behaviour of thin perforated plates and their application in silicon condenser microphones*. Elsevier Science. 6 s. Sensors and Actuators A 54.
- [2] G.N. Savin. 1961. *Stress concentration around holes*. Oxford. Pergamon Press. 430 s.
- [3] P. Meijers. 1969. *Plates with a Doubly-Periodic Pattern of Circular Holes Loaded in Plane Stress or in Bending*. First International Conference on Pressure Vessel Technology. Delft, the Netherlands, September 20-October 2, 1969. New York (NY). The American Society of Mechanical Engineers, 1969. 551-570 s.
- [4] H. Reponen. 1973. *Rei'itetty reaktoripaineastian kanssi*. Helsinki. Säteilfyysiikan laitos. 161 s. Raportti SFL-B 7.
- [5] D. Braess. 2001. *Finite elements: Theory, fast solvers and applications in solid mechanics*. 2.p. Cambridge, United Kingdom. Cambridge University press. 352 s. ISBN 0-521-01195-7
- [6] M. Lyly, R. Stenberg. 1999. *Stabilized finite element methods for Reissner-Mindlin plates*. Institut für Mathematic und Geometrie, Universität Innsbruck. 4-1999.